

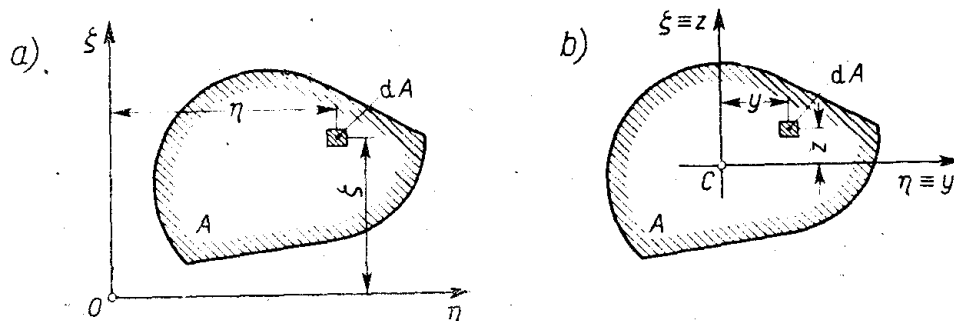
4 MOMENTY BEZWŁADNOŚCI PŁASKICH PRZEKROJÓW PRĘTA⁽¹⁾

4.1. Moment bezwładności przekroju względem osi

Już w rozdziale 3 wprowadzono pewne nowe wielkości geometryczne W_s i J_s związane z wymiarami przekroju i charakteryzujące jego właściwości w zagadnieniach skręcania. Podobną sytuację mamy w zagadnieniach zginania, gdzie występują całki typu

$$J_\eta = \int_A \zeta^2 dA, \quad (4.1a)$$

w których każde elementarne pole dA mnożone jest przez kwadrat odległości tego pola od obranej osi η , a całkowanie obejmuje całe pole A przekroju pręta (rys. 4.1a). Tak zdefiniowaną wielkość J_η nazywamy *momentem bezwładności przekroju względem osi η* . Moment ten ma wymiar cm^4 (lub m^4), jest zawsze dodatni jako suma samych dodatnich



Rys. 4.1. Definicja momentu bezwładności względem osi

składników $\zeta^2 dA$, a jego wartość zależy od kształtu i wymiarów przekroju oraz od położenia osi η względem przekroju. Gdy oś η jest centralna (rys. 4.1b), czyli gdy przechodzi ona przez środek ciężkości C przekroju, wówczas w wyrażeniu (4.1a) zamiast η i ζ piszemy y i z , czyli

$$J_y = \int_A z^2 dA, \quad (4.1b)$$

i J_y nazywamy *centralnym momentem bezwładności względem osi y* .

⁽¹⁾ Rozdział ten ma charakter pomocniczy, opisuje bowiem pewne geometryczne wielkości cechujące przekrój pręta. Wielkości te są głównie stosowane w zagadnieniach zginania prętów i z tego powodu utarło się omawianie ich w nauce wytrzymałości materiałów.

Podobnie definiujemy *moment bezwładności względem osi ζ*

$$J_{\zeta} = \int_A \eta^2 dA \quad (4.2a)$$

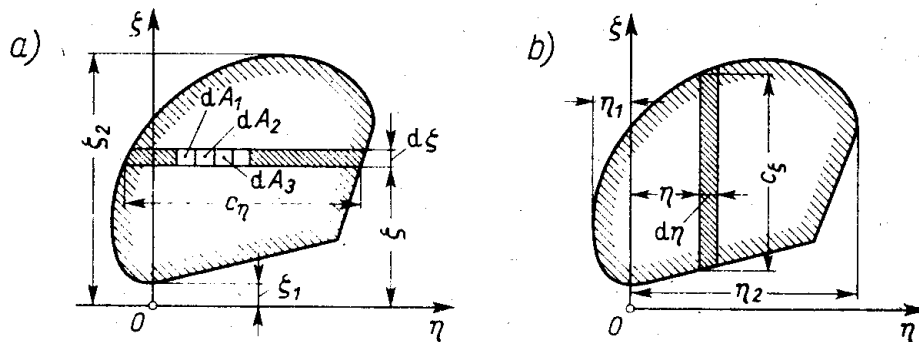
i jego szczególną wartość, gdy oś ζ jest centralna, czyli

$$J_z = \int_A y^2 dA \quad (4.2b)$$

jako *centralny moment bezwładności względem osi z*.

Analityczne określenie J_{η} sprowadza się do obliczenia całki *pojedynczej*. Zauważmy, że wszystkie pola dA elementarnego paska równoległego do osi η mają tę samą rzędną (rys. 4.2a). Wobec tego suma iloczynów $\zeta^2 dA$ dla elementów tego paska jest

$$\zeta^2 dA_1 + \zeta^2 dA_2 + \dots = \zeta^2 \sum dA = \zeta^2 c_{\eta} d\zeta, \quad (a)$$



Rys. 4.2. Obliczenie momentów J_{η}, J_{ζ} przez całkowanie

gdzie c_{η} — długość paska w kierunku osi η będąca, jak widać, funkcją ζ . Dla całego przekroju J_{η} jest sumą wyrażen (a), gdy ζ zmienia się w przedziale ζ_1, ζ_2 , tj.

$$J_{\eta} = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} c_{\eta} \zeta^2 d\zeta. \quad (4.3a)$$

Podobnie dzieląc pole A na paski równoległe do osi ζ obliczamy moment bezwładności J_{ζ} (rys. 4.2b) jako

$$J_{\zeta} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} c_{\zeta} \eta^2 d\eta, \quad (4.3b)$$

przy czym c_{ζ} — długość paska w kierunku osi ζ jest na ogół funkcją η . Występujące we wzorach (4.3) granice całkowania są wielkościami algebraicznymi i w przypadku takim, jak na rys. 4.2, mamy $\zeta_1 > 0, \zeta_2 > 0, \eta_2 > 0$, ale $\eta_1 < 0$.

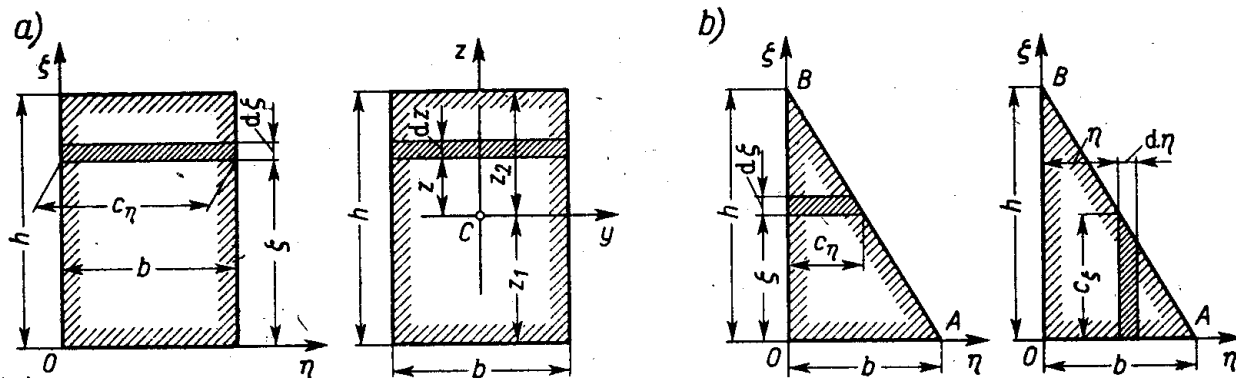
Dla przykładu obliczymy moment bezwładności prostokąta raz względem osi η , drugi raz względem osi centralnej y (rys. 4.3a). Podstawiając we wzorze (4.3a) $c_{\eta} = c_y = b = \text{const}$ oraz $\zeta_1 = 0, \zeta_2 = h$ otrzymujemy

$$J_{\eta} = \int_0^h b \zeta^2 d\zeta = b \left| \frac{\zeta^3}{3} \right|_0^h = \frac{bh^3}{3}, \quad (b)$$

a dla drugiego przypadku, gdy $z_1 = -h/2$, $z_2 = h/2$,

$$J_y = \int_{-h/2}^{h/2} bz^2 dz = b \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{24} - \frac{b(-h)^3}{24} = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.4a)$$

Jak widać, mamy tu $J_\eta = 4J_y$, co potwierdza, że położenie osi odniesienia ma istotny wpływ na wartość momentu bezwładności.



Rys. 4.3. Przykłady określenia momentów bezwładności

W podobny sposób wyznaczamy momenty bezwładności prostokąta względem osi ζ bądź względem osi centralnej z . W rezultacie otrzymujemy $J_\zeta = hb^3/3$ oraz

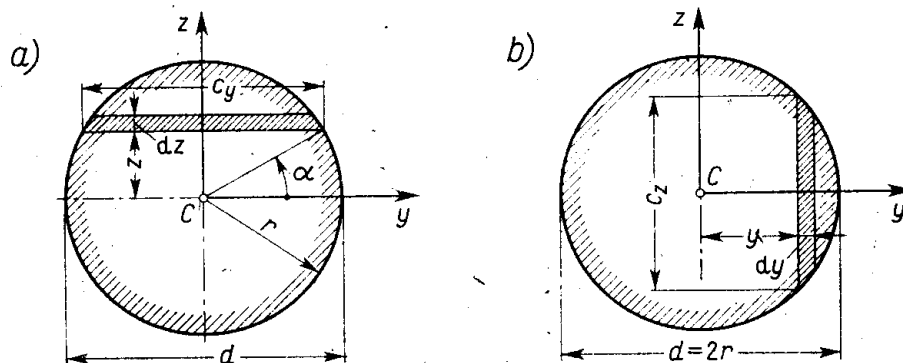
$$J_z = \frac{hb^3}{12}. \quad (4.4b)$$

Przy obliczeniu J_η dla trójkąta prostokątnego (rys. 4.3b) mamy $c_\eta = b(h-\zeta)/h \neq \text{const}$ i z wzoru (4.3a)

$$J_\eta = \int_0^h \frac{b(h-\zeta)}{h} \zeta^2 d\zeta = \frac{bh^3}{12}. \quad (c)$$

Podobnie określamy J_ζ , wyznaczając $c_\zeta = h(b-\eta)/b$, skąd po podstawieniu do (4.3b) i scałkowaniu od 0 do b

$$J_\zeta = hb^3/12. \quad (d)$$



Rys. 4.4. Obliczenie J_y i J_z dla przekroju kołowego

Dla przekroju kołowego (rys. 4.4a, b) mamy odpowiednio

$$c_y = 2\sqrt{r^2 - z^2}, \quad c_z = 2\sqrt{r^2 - y^2},$$

skąd wynika, że centralne momenty bezwładności J_y i J_z

$$J_y = \int_{-r}^{+r} 2\sqrt{r^2 - z^2} z^2 dz, \quad J_z = \int_{-r}^{+r} 2\sqrt{r^2 - y^2} y^2 dy$$

są wzajemnie równe, gdyż określone są jednakowymi zależnościami. Obliczenie uprościmy, biorąc jako zmienną kąt α . Wtedy

$$z = r \sin \alpha, \quad dz = r \cos \alpha d\alpha, \quad c_y = 2r \cos \alpha,$$

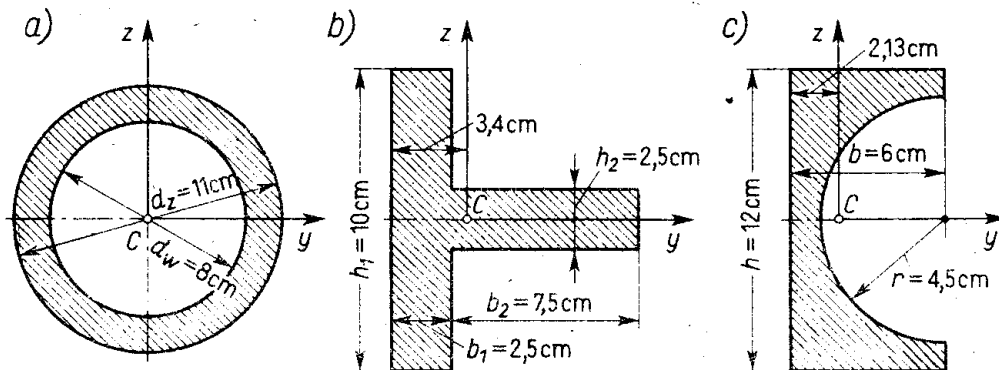
a granice całkowania są $\alpha_1 = -\pi/2$ i $\alpha_2 = \pi/2$, skąd

$$J_y = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 2r^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{r^4}{4} \left| \alpha - \frac{\sin 4\alpha}{4} \right|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\pi r^4}{4}$$

i ostatecznie dla kołowego przekroju mamy

$$J_y = J_z = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (4.5)$$

W wielu przypadkach obliczenia można uprościć, jeśli przekrój składa się z figur, których momenty bezwładności *względem tej samej osi* są znane. Moment bezwładności przekroju jest wtedy równy sumie⁽¹⁾ momentów bezwładności części składowych.



Rys. 4.5. Przykłady do obliczenia J_y przekrojów złożonych

Zadania

1. Dla trójkąta (rys. 4.3b) obliczyć J_ζ , gdy oś ζ przechodzi przez: a) wierzchołek A ; b) środek ciężkości przekroju.

Odp. a) $J_\zeta = b^3 h/4$, b) $J_\zeta = b^3 h/36$.

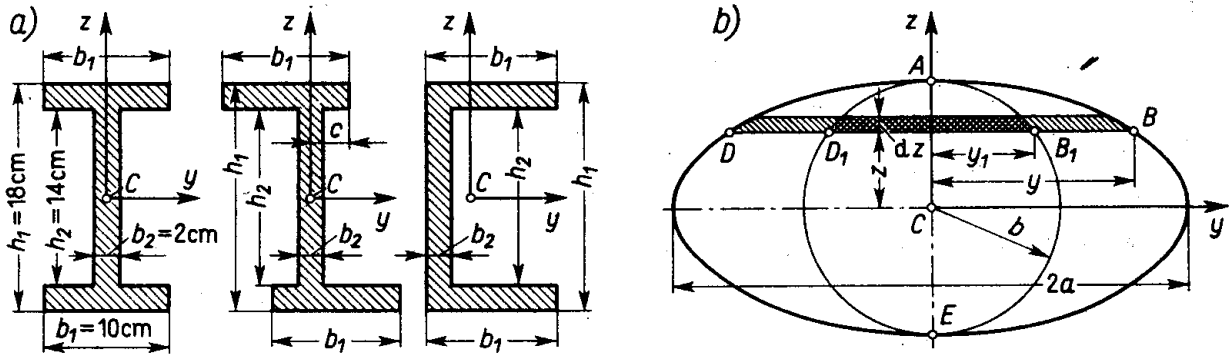
⁽¹⁾ Przy wycięciu z danego przekroju pewnych części, momenty bezwładności części usuniętych odejmujemy.

2. Wyznaczyć J_y dla przekrojów podanych na rys. 4.5.

Odp. a) $J_y = \pi (d_z^4 - d_w^4) / 64 = 517 \text{ cm}^4$; b) $J_y = 218 \text{ cm}^4$; c) $J_y = (bh^3/12) - (\pi r^4/8) = 703 \text{ cm}^4$.

3. Który z podanych przekrojów (rys. 4.6a) ma największą wartość J_y ?

Odp. Wartości są jednakowe, $J_y = (b_1 h_1^3/12) - [(b_1 - b_2) h_2^3/12] = 3030 \text{ cm}^4$.



Rys. 4.6.

4. W przekroju (rys. 4.2) powiększono 1,5 raza rzędne ζ nie zmieniając odciętych. Jak zmienia się J_η oraz J_ζ ?

Odp. Przy takim przekształceniu nowe współrzędne η' , ζ' oraz c'_η i c'_ζ związane są z poprzednimi: $\eta' = \eta$, $\zeta' = 1,5\zeta$ i $c'_\eta = c_\eta$, $c'_\zeta = 1,5c_\zeta$. Zależność (4.1a) ma teraz postać

$$J'_\eta = \int_{\zeta'_1}^{\zeta'_2} c'_\eta (\zeta')^2 d\zeta' = 1,5^3 \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} c_\eta \zeta^2 d\zeta = 1,5^3 J_\eta = 3,375 J_\eta$$

i podobnie z (4.2a) $J'_\zeta = 1,5 J_\zeta$.

5. Wykorzystując to, że elipsę $ABED$ otrzymujemy zwiększając odcięte koła AB_1ED_1 w stosunku a/b , tj. $y = ay_1/b$ (rys. 4.6b), obliczyć J_y i J_z dla przekroju eliptycznego.

Odp. Biorąc wyniki zadania 4 i wzór (4.5), mamy

$$J_y = \left(\frac{a}{b}\right) \frac{\pi b^4}{4} = \frac{\pi a b^3}{4}, \quad J_z = \left(\frac{a}{b}\right)^3 \frac{\pi b^4}{4} = \frac{\pi a^3 b}{4}. \quad (e)$$

4.2. Momenty bezwładności względem osi równoległych

Weźmy dowolny przekrój (rys. 4.7a), dla którego znane są *centralne* momenty bezwładności J_y oraz J_z . Obliczmy teraz momenty J_η i J_ζ względem osi η i ζ równoległych do centralnych osi y i z . Zgodnie z definicją (wzory 4.1a i 4.2a) mamy

$$J_\eta = \int_A \zeta^2 dA, \quad J_\zeta = \int_A \eta^2 dA. \quad (a)$$

Wstawiając do tych wyrażeń odczytane z rysunku zależności $\zeta = z + \zeta_c$, $\eta = y + \eta_c$ otrzymujemy po rozwinięciu

$$J_\eta = \int_A (z + \zeta_c)^2 dA = \int_A z^2 dA + 2\zeta_c \int_A z dA + \zeta_c^2 \int_A dA, \quad (b)$$

$$J_\zeta = \int_A (y + \eta_c)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2\eta_c \int_A y dA + \eta_c^2 \int_A dA, \quad (c)$$

przy czym ζ_c i η_c jako wielkości stałe wnosimy przed znak całki. Pierwsze składniki wyrażeń (b) i (c) są centralnymi momentami J_y oraz J_z (wzory 4.1b i 4.2b) i są znane z założenia. Trzecie składniki są odpowiednio $A\zeta_c^2$ i $A\eta_c^2$, albowiem $\int_A dA$, jest równa polu A przekroju. Wreszcie zauważmy, że całki

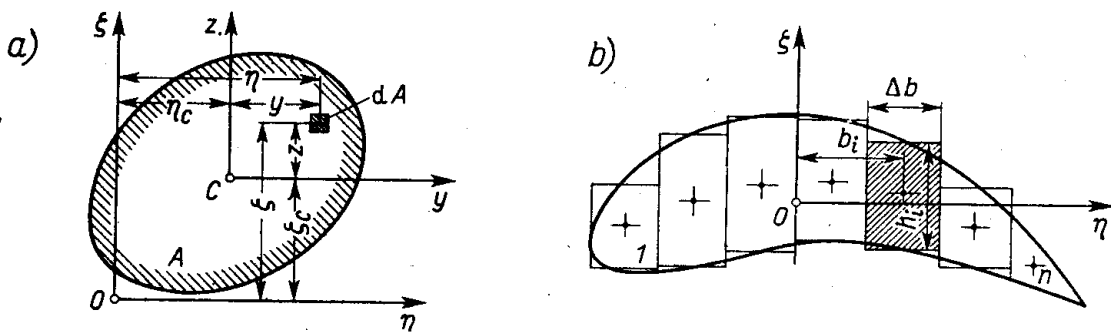
$$\int_A z dA, \quad \int_A y dA$$

są momentami statycznymi pola przekroju odpowiednio względem centralnych osi y i z i z tego powodu, jak wiemy z kursu mechaniki ogólnej, są one równe zero.

W wyniku zależności (b) i (c) przybierają postać

$$J_\eta = J_y + A\zeta_c^2, \quad J_\zeta = J_z + A\eta_c^2, \quad (4.6)$$

dającą szukaną odpowiedź. Budowa wzorów (4.6), tzw. wzorów Steinerja, wskazuje, że z całej mnogości momentów J_η (lub J_ζ) dla rodziny równoległych osi η (lub ζ) centralny moment bezwładności J_y (lub J_z) jest najmniejszy. Jeśli więc mamy zagadnienie proste



Rys. 4.7. Sformułowanie wzorów Steinerja i ich zastosowanie

(dane: J_y, J_z, A, η_c i ζ_c , szukane: J_η, J_ζ), to składniki $A\zeta_c^2$ i $A\eta_c^2$ należy odpowiednio dodać do znanych J_y i J_z . Gdy zagadnienie jest odwrotne (dane: $J_\eta, J_\zeta, A, \eta_c, \zeta_c$, szukane: J_y, J_z), składniki te należy odpowiednio odjąć od znanych J_η i J_ζ .

Dzięki wzorom Steinerja obliczenie momentów bezwładności jest znacznie uproszczone, albowiem stosowane w praktyce przekroje stanowią kombinację tylko niewielu figur prostych (prostokąt, koło, trójkąt). To samo jest w przypadku przekrojów składanych z tzw. profili znormalizowanych (rys. 3.22), dla których tablice podają położenie ich środków ciężkości i ich centralne momenty bezwładności.⁽¹⁾ Innym zastosowaniem tych wzorów jest określenie momentów w sposób przybliżony, gdy przekrój podany jest tylko wykreślnie (rys. 4.7b). Przy obliczeniu na przykład momentu J_ζ przekrój dzielimy szeregiem równoległych linii i każdy pasek zastępujemy prostokątem. Moment bezwładności paska „i” jest

$$(J_\zeta)_i \approx (\Delta b^3 h_i/12) + \Delta b h_i b_i^2, \quad (d)$$

a całkowity moment J_ζ

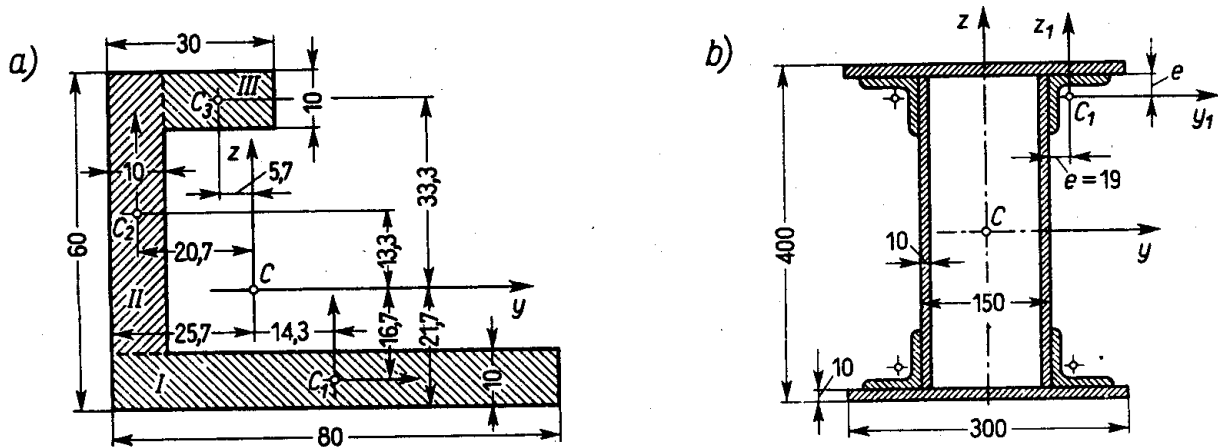
$$J_\zeta \approx (\Delta b^3/12) \sum h_i + \Delta b \sum h_i b_i^2. \quad (e)$$

⁽¹⁾ Patrz na przykład: *Mechanik*, t.II, cz. IA, str. 358 ÷ 367, ponadto *Polskie Normy* PN-59/H-93401-PN-59/H-93407.

Zadania

1. Dla podanego przekroju (rys. 4.8a) wyznaczyć momenty J_y i J_z .

Rozwiązanie. Dzielimy przekrój na prostokąty I , II i III , dla których określamy położenie ich środków ciężkości C_1 , C_2 , C_3 . Po wyznaczeniu położenia środka ciężkości C całego przekroju określamy współrzędne środków C_1 , C_2 , C_3 w układzie osi y , z , który dla składowych prostokątów jest



Rys. 4.8. Dane do zadań 1 i 2 (wymiary w mm)

niecentralny. W przyjętej więc symbolice (rys. 4.7a) współrzędne te są η_c i ζ_c , na przykład dla prostokąta II : $\eta_c = -2,07$ cm, $\zeta_c = 1,33$ cm. Z kolei obliczamy „własne” centralne momenty dla części składowych. Dla prostokąta II na przykład: $(J_y)_{wlasne} = 1 \cdot 5^3/12 = 10,4$ cm⁴, $(J_z)_{wlasne} = 5 \cdot 1^3/12 = 0,4$ cm⁴ itd. Całość obliczeń ujmujemy w poniższej tabelicy, w której znaczenie poszczególnych kolumn jest oczywiste. W wyniku mamy $J_y = 11,3 + 53,3 = 64,6$ cm⁴, $J_z = 82,1$ cm⁴.

Część	$J_{y_{wlasne}}$ cm ⁴	A cm ²	ζ_c cm	$A \zeta_c^2$ cm ⁴	$J_{z_{wlasne}}$ cm ⁴	A cm ²	η_c cm	$A \eta_c^2$ cm ⁴
I	$8 \cdot 1^3/12 \approx 0,7$	8,0	-1,67	22,3	$1 \cdot 8^3/12 = 42,7$	8,0	1,43	16,3
II	$1 \cdot 5^3/12 = 10,4$	5,0	+1,33	8,8	$5 \cdot 1^3/12 \approx 0,4$	5,0	-2,07	21,4
III	$2 \cdot 1^6/12 \approx 0,2$	2,0	+3,33	22,2	$1 \cdot 2^3/12 \approx 0,7$	2,0	-0,57	0,6
Σ	11,3 cm ⁴			53,3 cm ⁴	43,8 cm ⁴			38,3 cm ⁴

2. Wyznaczyć J_y i J_z symetrycznego przekroju (rys. 4.8b), jeśli dla każdego z kątowników: $A = 10$ cm², $(J_y)_{wlasne} = (J_z)_{wlasne} = 38$ cm⁴.

Odp. $J_y \approx 43,8 \cdot 10^3$ cm⁴, $J_z \approx 11,9 \cdot 10^3$ cm⁴.

3. Obliczyć J_y dla przekroju w kształcie półkola (rys. 4.9a).

Rozwiązanie. Zadanie jest przykładem zadania odwrotnego. Moment $J_\eta = \pi r^4/8$ jest równy połowie J_y (wzór 4.5), a ponieważ $\zeta_c = 4r/3\pi$, z wzoru (4.6) mamy

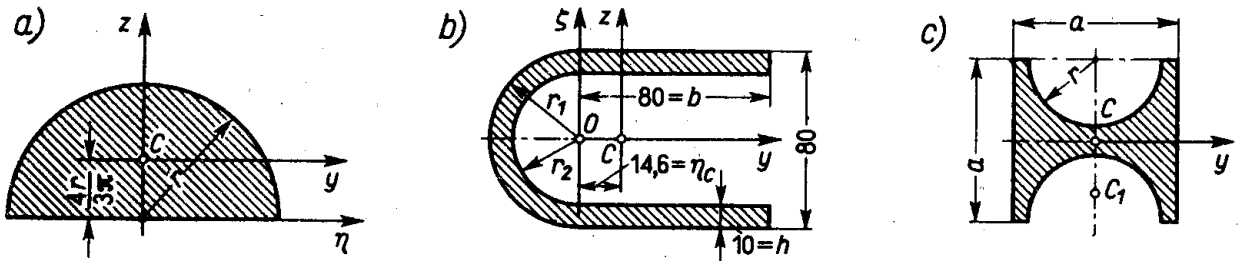
$$J_y = (\pi r^4/8) - (\pi r^2/2) (4r/3\pi)^2 \approx 0,1097 r^4.$$

4. Obliczyć J_z dla przekroju (rys. 4.9b).

Rozwiązanie. Po określeniu środka ciężkości C obliczamy

$$J_z = \frac{\pi(r_1^4 - r_2^4)}{8} + \frac{2hb^3}{3} \approx 410 \text{ cm}^4 \quad \text{oraz} \quad J_z = J_z - A\eta_c^2 = 352 \text{ cm}^4.$$

Widać, że wygodniej jest tu obliczyć najpierw J_ζ względem osi niecentralnej, a dopiero potem przejść do osi centralnej z .



Rys. 4.9. Dane do zadań 3, 4 i 5

5. Ktoś obliczając J_y dla przekroju (rys. 4.9c) podał wynik: $J_y = (a^4/12) - 2 [(\pi r^4/8) + (\pi r^2/2) (a/2)^2]$. Czy wynik ten jest dobry?

Odp. Nie. Dla półkola należy obliczyć $(J_y)_{wlasne}$ względem C_1 i dopiero potem obliczyć $(J_y)_{wlasne} + (\pi r^2/2) (\overline{CC_1})^2$.

4.3. Odśrodkowy moment bezwładności. Definicja głównych osi

W teorii zginania prętów występują również całki typu

$$J_{\eta\zeta} = \int_A \eta\zeta \, dA, \quad (4.7)$$

w których każde elementarne pole dA mnożone jest przez iloczyn jego współrzędnych prostokątnych, a sumowanie (całkowanie) rozciąga się na całe pole A przekroju (rys. 4.1a). Wielkość $J_{\eta\zeta}$ nazywamy *odśrodkowym momentem bezwładności przekroju względem osi η i ζ* . Podobnie jak momenty bezwładności J_η , J_ζ , ma on wymiar cm^4 , a jego wartość zależy od kształtu i wymiarów przekroju oraz od położenia układu osi względem przekroju. Podobnie też sygnalizujemy przypadek szczególny, gdy osie η , ζ są centralne, pisząc J_{yz} zamiast $J_{\eta\zeta}$.

Poza wyliczonymi podobieństwami istnieją i różnice. Zasadniczą różnicą jest, że zależnie od obioru układu osi moment $J_{\eta\zeta}$ może być dodatni, ujemny lub równy zeru. To ostatnie jest widoczne, gdy przekrój jest symetryczny i jedna z osi układu η , ζ jest osią symetrii (rys. 4.10a). Każdemu elementowi dA o współrzędnych η , ζ odpowiada taki sam element o współrzędnych η i $\zeta_1 = -\zeta$ i suma $\eta\zeta \, dA + \eta\zeta_1 \, dA = 0$, a co za tym idzie i cała suma, tj. $J_{\eta\zeta} = 0$.

Dla każdego punktu O dowolnego przekroju można zawsze tak dobrać osie η_α , ζ_α (rys. 4.10b), żeby moment odśrodkowy $(J_{\eta\zeta})_\alpha$ był równy zeru. Aby tego dowieść, zbadajmy zmianę tego momentu przy obrocie osi. Załóżmy, że $(J_{\eta\zeta})_0$ w stadium I jest znane. Przy stopniowym obrocie układu osi wartość tego momentu ulega zmianie ciągłej. Gdy $\alpha = 90^\circ$ (stadium III), wówczas z rysunku widać, że współrzędne pola dA są

$$\eta_{90} = \zeta_0, \quad \zeta_{90} = -\eta_0, \quad (a)$$

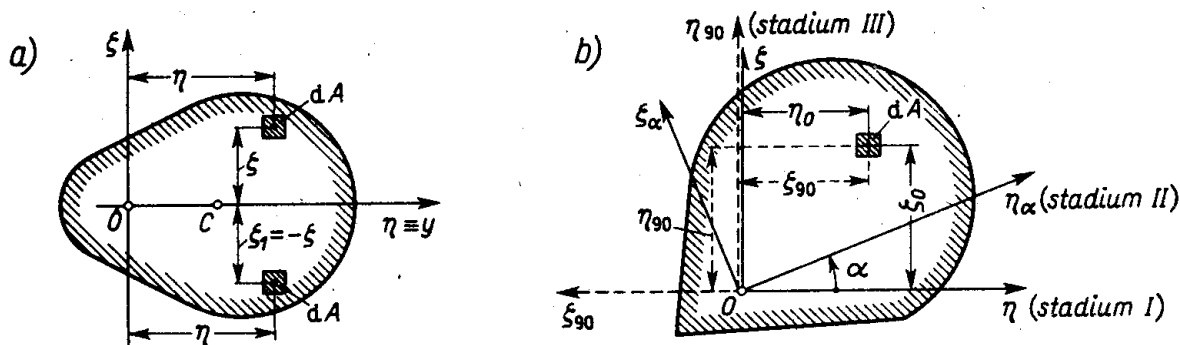
a elementarny moment odśrodkowy w tym stadium III

$$(dJ_{\eta\zeta})_{90} = \eta_{90} \zeta_{90} \, dA = -\eta_0 \zeta_0 \, dA = -(dJ_{\eta\zeta})_0. \quad (b)$$

Z tej zależności wynika w konsekwencji, że

$$(J_{\eta\zeta})_{90} = -(J_{\eta\zeta})_0. \quad (c)$$

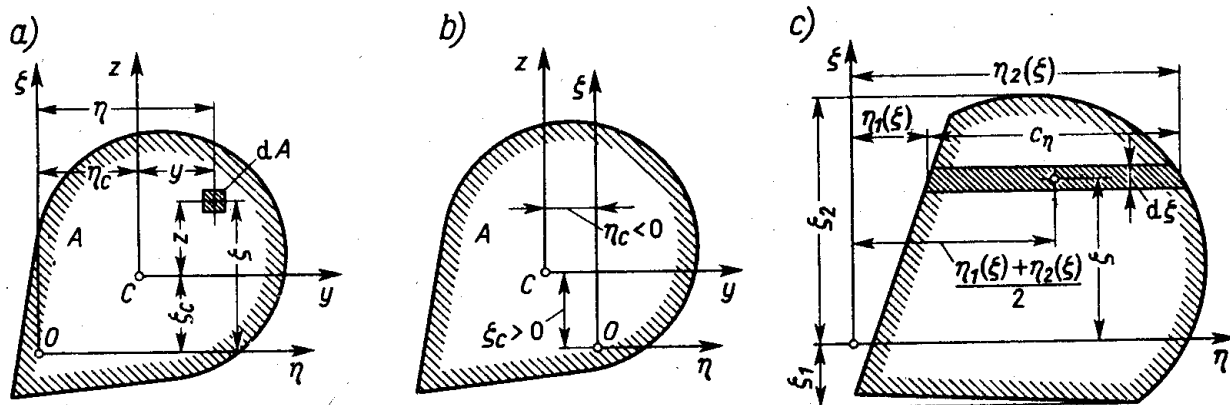
Skoro więc przy obrocie osi o kąt $\alpha = 90^\circ$ następuje zmiana znaku $J_{\eta\zeta}$, to musi istnieć pośrednie położenie osi, w którym $(J_{\eta\zeta})_\alpha = 0$. Ten szczególny układ nazywamy *głównym dla obranego punktu O*. Jeśli tym punktem jest środek ciężkości przekroju, to taki układ



Rys. 4.10. Jakościowa analiza odśrodkowego momentu bezwładności

osi nazywamy *głównym centralnym*. Dla przekroju symetrycznego (rys. 4.10a) jest oczywiste, że oś symetrii oraz prostopadła do niej druga centralna oś są *głównymi centralnymi*.

Sformułujmy obecnie wzór analogiczny do wzorów Steinera. Załóżmy mianowicie, że odśrodkowy moment J_{yz} jest znany i obliczmy moment $J_{\eta\zeta}$ względem układu osi η, ζ



Rys. 4.11. Obliczenie momentu odśrodkowego

równoległych do centralnego układu y, z (rys. 4.11a). Z rysunku odczytujemy, że $\eta = y + \eta_c$, $\zeta = z + \zeta_c$, wobec czego

$$\begin{aligned} J_{\eta\zeta} &= \int_A \eta\zeta \, dA = \int_A (y + \eta_c)(z + \zeta_c) \, dA = \\ &= \int_A yz \, dA + \eta_c \zeta_c \int_A dA + \eta_c \int_A z \, dA + \zeta_c \int_A y \, dA. \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu, że dwie ostatnie całki, jako momenty statyczne względem osi centralnych, są równe zeru, mamy zależność

$$J_{\eta\zeta} = J_{yz} + A \eta_c \zeta_c. \quad (4.8)$$

Jej znaczenie i zastosowanie jest takie samo jak wzorów Steinera dla momentów J_η i J_ζ . Dla uniknięcia błędów, należy pamiętać, że układy y, z oraz η, ζ muszą mieć zwroty zgodne, a współrzędne η_c i ζ_c środka ciężkości w układzie *niecentralnym* są wielkościami algebraicznymi. Na rysunku 4.11a mamy więc $\eta_c > 0$ i $\zeta_c > 0$, natomiast na rys. 4.11b $\eta_c < 0, \zeta_c > 0$.

Wykorzystując zależność (4.8) możemy $J_{\eta\zeta}$ wyznaczyć przez *pojedyncze* całkowanie. Dzieląc przekrój na elementarne paski równoległe do jednej z osi (rys. 4.11c), obliczmy moment $dJ_{\eta\zeta}$ jednego z nich. Pasek ten jest prostokątem o polu $c_\eta d\zeta$, współrzędne jego środka ciężkości są $(\eta_1 + \eta_2)/2$ oraz ζ , a jego „własny” moment odśrodkowy względem jego osi centralnych (osie symetrii) jest równy zeru. Uwzględniając to mamy z (4.8)

$$dJ_{\eta\zeta} = c_\eta(\eta_1 + \eta_2)\zeta d\zeta/2. \quad (d)$$

Całkowity moment odśrodkowy jest całką wyrażen (d) w granicach od ζ_1 do ζ_2 . Tak więc

$$J_{\eta\zeta} = \frac{1}{2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} c_\eta(\eta_1 + \eta_2)\zeta d\zeta, \quad (4.9)$$

przy czym zgodnie z rys. 4.11c wielkości c_η, η_1, η_2 muszą być wyrażone jako funkcje bieżącej zmiennej ζ .

Zadania

1. Obliczyć moment odśrodkowy $J_{\eta\zeta}$ dla prostokąta (rys. 4.3a).

Odp. Z wzoru (4.8), przy $J_{yz} = 0$, mamy $J_{\eta\zeta} = A \eta_c \zeta_c = b^2 h^2 / 4$.

2. Obliczyć momenty odśrodkowe $J_{\eta\zeta}, J_{yz}$ dla trójkąta (rys. 4.3b).

Odp. Konfrontując rys. 4.3b i 4.11c ustalamy: $c_\eta = b(h - \zeta)/h, \eta_1 = 0, \eta_2 = c_\eta, \zeta_1 = 0, \zeta_2 = h$, skąd

$$J_{\eta\zeta} = \frac{1}{2} \int_0^h \frac{b^2(h - \zeta)^2}{h^2} \zeta d\zeta = \frac{b^2 h^2}{24},$$

a z wzoru (4.8), gdy $\eta_c = b/3, \zeta_c = h/3$, mamy

$$(b^2 h^2 / 24) = J_{yz} + (bh/2)(b/3)(h/3), \quad \text{skąd} \quad J_{yz} = -b^2 h^2 / 72.$$

3. Obliczyć J_{yz} dla przekroju (rys. 4.8a).

Odp. $J_{yz} = 8 \cdot 1,43(-1,67) + 5(-2,07)1,33 + 2(-0,57)3,33 = -36,7 \text{ cm}^4$.

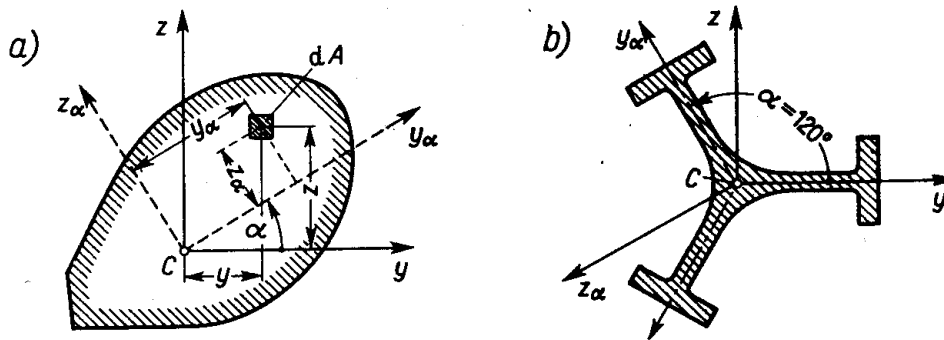
Uwaga. Współrzędne η_c i ζ_c określamy w układzie y, z *niecentralnym* dla prostokątów I, II i III.

4. Jak zmieni się moment odśrodkowy $J_{\eta\zeta}$ przekroju (rys. 4.11c), jeśli a) wszystkie wymiary przekroju zwiększyć dwukrotnie; b) zostawiając rzędne zwiększyć dwukrotnie odcięte; c) zostawiając odcięte zwiększyć dwukrotnie rzędne.

Odp. a) wzrośnie 16 razy, b) i c) wzrośnie 4-krotnie.

4.4. Wyznaczenie centralnych osi głównych. Główne centralne momenty bezwładności

W artykule 4.3 udowodniono istnienie głównych osi, nie określono jednak ich liczby i ich położenia. Kwestią tą zajmiemy się obecnie, przy czym ograniczymy się do przypadku,



Rys. 4.12. Obrót osi i określenie głównych osi centralnych

gdy osie η, ζ są *centralne*, tj. $\eta = y, \zeta = z$. Załóżmy, że dla danego przekroju (rys. 4.12a) znane są centralne momenty bezwładności oraz centralny moment odśrodkowy

$$J_y = \int_A z^2 dA, \quad J_z = \int_A y^2 dA, \quad J_{yz} = \int_A yz dA \quad (a)$$

i spróbujmy wyznaczyć te wielkości dla układu osi y_α, z_α obróconego o kąt α względem pierwotnego. Z rysunku odczytujemy

$$y_\alpha = y \cos \alpha + z \sin \alpha, \quad z_\alpha = -y \sin \alpha + z \cos \alpha, \quad (b)$$

jako nowe współrzędne elementarnego pola dA . Zgodnie z definicją momentu bezwładności względem osi y_α mamy

$$\begin{aligned} (J_y)_\alpha &= \int_A z_\alpha^2 dA = \int_A (-y \sin \alpha + z \cos \alpha)^2 dA = \\ &= \int_A z^2 \cos^2 \alpha dA + \int_A y^2 \sin^2 \alpha dA - \int_A 2yz \sin \alpha \cos \alpha dA, \end{aligned}$$

a po uwzględnieniu zależności (a) i drobnych przekształceniach

$$(J_y)_\alpha = \frac{1}{2} (J_y + J_z) + \frac{1}{2} (J_y - J_z) \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha. \quad (4.10a)$$

Analogicznie obliczamy moment $(J_z)_\alpha$

$$(J_z)_\alpha = \int_A y_\alpha^2 dA = \frac{1}{2} (J_y + J_z) - \frac{1}{2} (J_y - J_z) \cos 2\alpha + J_{yz} \sin 2\alpha. \quad (4.10b)$$

Wreszcie moment odśrodkowy $(J_{yz})_\alpha$ jest

$$\begin{aligned}(J_{yz})_\alpha &= \int_A y_\alpha z_\alpha dA = \int_A (y \cos \alpha + z \sin \alpha)(-y \sin \alpha + z \cos \alpha) dA = \\ &= \int_A z^2 \sin \alpha \cos \alpha dA - \int_A y^2 \sin \alpha \cos \alpha dA + \int_A yz (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) dA\end{aligned}$$

lub po uwzględnieniu zależności (a)

$$(J_{yz})_\alpha = \frac{1}{2}(J_y - J_z) \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha. \quad (4.10c)$$

Zależności (4.10) dają poszukiwane wielkości dla dowolnego kąta α . Gdy centralne osie y_α i z_α są jednocześnie główne, $(J_{yz})_\alpha = 0$ i z zależności (4.10c) mamy równanie

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{yz}}{J_y - J_z}, \quad (4.11)$$

którego rozwiązanie daje w przedziale $0, 2\pi$ na ogół tylko dwie odpowiedzi $2\alpha_1$ i $2\alpha_2 = 2\alpha_1 + \pi$. *Dowolny więc przekrój ma na ogół tylko dwie centralne osie główne*, określone kątami α_1 i α_2 , i osie te są do siebie *prostopadłe*. Wyjątek od tej reguły jest, gdy jednocześnie $J_{yz} = 0$ oraz $J_y = J_z$, a $\operatorname{tg} 2\alpha = 0/0$ jest nieoznaczone. Wtedy jednak z wzorów (4.10) mamy, że niezależnie od kąta α

$$(J_{yz})_\alpha = 0, \quad (J_y)_\alpha = (J_z)_\alpha = J_y = J_z. \quad (c)$$

Tak więc w tym wyjątkowym przypadku *każda oś centralna jest główna*, a moment bezwładności względem każdej z nich jest jednakowy. Przekroje takie są, wbrew pozorom, dość często spotykane w praktyce, jak na przykład kwadrat, koło oraz przekroje o więcej niż dwóch osiach symetrii (rys. 4.12b).

Mając położenie głównych centralnych osi, tj. kąty α_1 i α_2 , wyznaczamy z (4.10a) odpowiadające tym osiom główne centralne momenty bezwładności J_1 oraz J_2 . Uwzględniając, że

$$\cos 2\alpha = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}, \quad \sin 2\alpha = \operatorname{tg} 2\alpha/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha},$$

a $\operatorname{tg} 2\alpha$ jest znany z (4.11), otrzymujemy z (4.10a)

$$\left. \begin{matrix} J_1 \\ J_2 \end{matrix} \right\} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\frac{(J_y - J_z)^2}{4} + J_{yz}^2}. \quad (4.12)$$

Momenty J_1 i J_2 przedstawiają ekstremalne wartości momentów $(J_y)_\alpha$ i $(J_z)_\alpha$ odpowiadających różnym kątom α . Przyrównując mianowicie do zera pochodną

$$(dJ_y)_\alpha/d\alpha = -(J_y - J_z) \sin 2\alpha - 2J_{yz} \cos 2\alpha \quad (d)$$

otrzymujemy równanie dla $\operatorname{tg} 2\alpha$ identyczne z (4.11). To dowodzi, że moment bezwładności względem jednej z osi głównych jest maksymalny, względem drugiej — minimalny. Stwierdzenie to po naniesieniu głównych osi na rysunku przekroju pozwala ustalić od pierwszego rzutu oka, której z nich odpowiada maksymalny, a której minimalny moment bezwładności. W przypadkach wątpliwych, zresztą rzadkich, odpowiedniość ustalamy badając znaki $\cos 2\alpha$ i $\sin 2\alpha$ odpowiadające wartości $\operatorname{tg} 2\alpha$ danej z (4.11) i wstawiając te funkcje do (4.10a).

Należy zauważyć, że przedstawiona analiza stosuje się, gdy układ osi nie jest centralny, trzeba tylko we wzorach (4.10)÷(4.12) wstawić współrzędne η, ζ zamiast y, z .

Zadania

1. Udowodnić bez rachunków, że przekrój o 3-krotnej symetrii (rys. 4.12b) ma rzeczywiście nieskończenie wiele głównych centralnych osi.

Odp. Wiemy, że oś symetrii jest główna; przekrój ma więc co najmniej 3 osie główne, a wiemy, że tych osi może być albo tylko dwie, albo nieskończenie wiele.

2. Dla przekroju (rys. 4.8a) wyznaczyć położenie głównych centralnych osi i głównie centralne momenty bezwładności.

Rozwiązanie. Biorąc wyniki zadań 1 (art. 4.2) i 3 (art. 4.3)

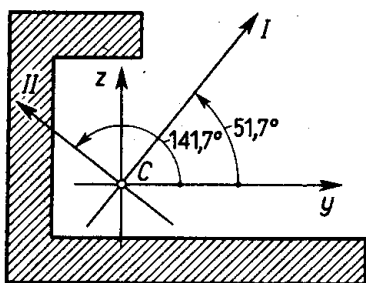
$$J_y = 64,6 \text{ cm}^4, \quad J_z = 82,1 \text{ cm}^4, \quad J_{yz} = -36,7 \text{ cm}^4$$

mamy z (4.11): $\operatorname{tg} 2\alpha = -4,19$, skąd $2\alpha_1 = 103,44^\circ$, $2\alpha_2 = 283,44^\circ$, i w wyniku $\alpha_1 = 51,7^\circ$, $\alpha_2 = 141,7^\circ$.

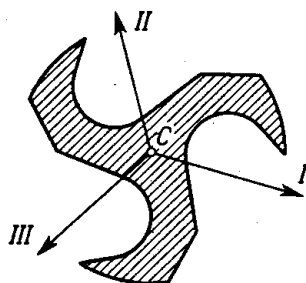
Nanosząc te osie na rysunku przekroju (rys. 4.13) widzimy od razu, że osi I odpowiada maksymalny moment, tj. J_1 , osi II minimalny, tj. J_2 . Wartości ich według (4.12) są

$$\left. \begin{array}{l} J_1 \\ J_2 \end{array} \right\} = \frac{64,6 + 82,1}{2} \pm \sqrt{\frac{(64,6 - 82,1)^2}{4} + (-36,7)^2} = \begin{cases} 111,0 \text{ cm}^4, \\ 35,6 \text{ cm}^4. \end{cases}$$

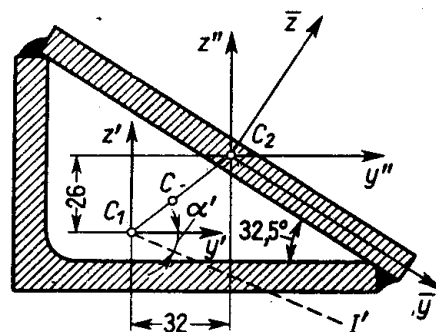
Z rachunków wynika potrzeba zwrócenia szczególnej uwagi na znak J_{yz} i znak $\operatorname{tg} 2\alpha$, gdyż to decyduje o poprawności wyniku.



Rys. 4.13. Wynik dla zadania 2



Rys. 4.14. Do zadania 5



Rys. 4.15. Do zadania 6

3. Wykorzystując wyniki zadania 1 (art. 4.1) i 2 (art. 4.3) wyznaczyć położenie głównych centralnych osi i wartości J_1, J_2 dla trójkąta (rys. 4.3b), gdy $b = 10 \text{ cm}$, $h = 18 \text{ cm}$.

Odp. $\alpha_1 = 19,3^\circ$, $\alpha_2 = 109,3^\circ$, $J_1 = 1778 \text{ cm}^4$, $J_2 = 342 \text{ cm}^4$.

4. W przekroju (rys. 4.13) powiększono dwukrotnie: a) wszystkie wymiary; b) tylko odcięte. Czy położenie głównych osi zmieni się?

Odp. a) nie; b) tak, nowe wartości są: $\alpha_1 = 75,8^\circ$, $\alpha_2 = 165,8^\circ$.

5. Ile głównych centralnych osi ma przekrój o trzykrotnej punktowej symetrii (rys. 4.14)?

Odp. Nieskończenie wiele. Gdy oś I jest główna, wówczas z racji symetrii osie II i III są też główne. Dalszy dowód, jak w zadaniu 1.

6. Przekrój (rys. 4.15) składa się z płaskownika $14 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ i kątownika, dla którego z tablic mamy: $J'_y = 98 \text{ cm}^4$, $J'_z = 276 \text{ cm}^4$, $A' = 19,1 \text{ cm}^2$ oraz położenie głównej centralnej osi I' określone przez $\operatorname{tg} \alpha' = -0,438$. Biorąc pozostałe dane z rysunku obliczyć położenie głównych centralnych osi dla przekroju oraz wartości J_1 i J_2 .

Rozwiązanie. Rozpoczynamy od obliczenia J'_{yz} dla kątownika. Z wzoru (4.11) mamy $J'_{yz} = -(J'_y - J'_z) \operatorname{tg} 2\alpha'/2 = 178 (-1,092)/2 = -97,0 \text{ cm}^4$, gdyż kąt $\alpha' = -23,7^\circ < 0$ (rys. 4.12a). Następnie obliczamy z (4.10a) i (4.10b) momenty J''_y, J''_z, J''_{yz} dla płaskownika biorąc główne centralne momenty względem osi \bar{y}, \bar{z} : $J_y = 1^3 \cdot 14/12 \approx 1,2 \text{ cm}^4, J_z = 1 \cdot 14^3/12 = 228,6 \text{ cm}^4, J_{yz} = 0$ oraz kąt $\alpha'' = 32,5^\circ$. W wyniku mamy $J''_y = 66,9 \text{ cm}^4, J''_z = 163,2 \text{ cm}^4, J''_{yz} = -103,0 \text{ cm}^4$. Po tych operacjach reszta jest powtórzeniem już przerobionych zadań i obejmuje: wyznaczenie środka ciężkości C i momentów bezwładności całego przekroju (wzory 4.6 i 4.8). Wynik

$$J_y = 220 \text{ cm}^4, \quad J_z = 587 \text{ cm}^4, \quad J_{yz} = -133 \text{ cm}^4$$

daje podstawę do obliczenia $\alpha_1 = 72,0^\circ, \alpha_2 = 162,0^\circ$ z wzoru (4.11) oraz $J_1 = 630 \text{ cm}^4, J_2 = 178 \text{ cm}^4$ z wzoru (4.12).

4.5. Biegunowy moment bezwładności przekroju

Dodając stronami zależności (4.10a) i (4.10b) otrzymujemy, że suma ta jest stała i nie zależy od kąta α , czyli

$$(J_y)_\alpha + (J_z)_\alpha = J_y + J_z. \quad (\text{a})$$

Wynik powyższy stanie się jasny, jeśli zauważyć, że

$$J_y + J_z = \int_A z^2 dA + \int_A y^2 dA = \int_A (z^2 + y^2) dA = \int_A r_C^2 dA \quad (\text{b})$$

jest sumą iloczynów elementarnych pól przez kwadraty ich odległości r_C od środka C , niezmiennych na obrót osi, gdyż zawsze $r_C^2 = y^2 + z^2 = y_\alpha^2 + z_\alpha^2$. Tę sumę

$$J_0 = J_y + J_z = \int_A r_C^2 dA \quad (4.13a)$$

nazywamy *centralnym biegunowym momentem bezwładności przekroju*. Jeśli początek układu O nie pokrywa się ze środkiem ciężkości (rys. 4.7a), to analogiczną sumę

$$J_0^* = J_\eta + J_\zeta = \int_A (\zeta^2 + \eta^2) dA = \int_A \rho^2 dA \quad (4.13b)$$

nazwiemy *biegunowym momentem bezwładności przekroju względem punktu O* . Wykorzystując wzory Steinera (4.6) mamy od razu

$$J_0^* = J_0 + A(\eta_C^2 + \zeta_C^2) = J_0 + A\varrho_C^2, \quad (4.14)$$

gdzie $\varrho_C = \overline{OC}$ odległość między początkiem układu O a środkiem ciężkości C .

Na ogół wartość J_0 bądź J_0^* obliczamy z (4.13) sumując momenty bezwładności względem dwóch dowolnych osi prostopadłych do siebie i przechodzących przez początek układu. Dla przekroju na przykład kołowego (rys. 4.5a) mamy z wzorów (4.5) wynik

$$J_0 = J_y + J_z = 2 \frac{\pi(r_z^4 - r_w^4)}{4} = \frac{\pi(d_z^4 - d_w^4)}{32}, \quad (\text{c})$$

identyczny ze znanym już wzorem (3.10). Daje on fizyczną interpretację wielkości J_0 stosowanej przy skręcaniu.

Pojęcie biegunowego momentu J_0 można wykorzystać do obliczenia momentów bezwładności J_y, J_z w przekrojach o wielokrotnej (większej niż dwukrotna) symetrii osiowej (rys. 4.12b) lub punktowej (rys. 4.14). W takich przekrojach każda oś centralna jest główna, a $J_y = J_z$ i z wzoru (4.13a) mamy

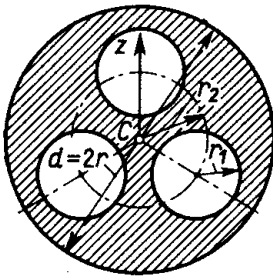
$$J_y = J_z = J_0/2. \quad (4.15)$$

Zadania

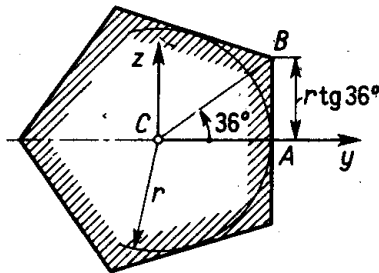
1. Wyznaczyć wartość J_z dla przekroju (rys. 4.16).

Odp. $J_z = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi r^4}{2} - 3 \left(\frac{\pi r_1^4}{2} + \pi r_1^2 r_2^2 \right) \right].$

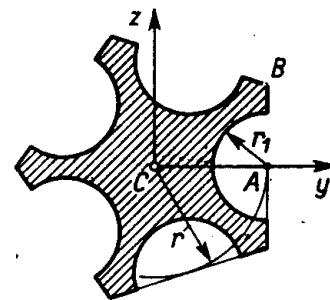
2. Wyznaczyć momenty bezwładności J_y, J_z dla foremnego pięciokąta o promieniu koła wpisanego r (rys. 4.17).



Rys. 4.16. Do zadania 1



Rys. 4.17. Do zadania 2



Rys. 4.18. Do zadania 3

Rozwiązanie. Wyznaczamy biegunowy moment $(J_0^*)_{ABC}$ trójkąta ABC względem punktu C . Momenty: $(J_y)_{ABC} = r (r \operatorname{tg} 36^\circ)^3 / 12$ (wzór c art. 4.1), $(J_z)_{ABC} = r^3 (r \operatorname{tg} 36^\circ) / 4$ (zadanie 1 art. 4.1), skąd

$$(J_0^*)_{ABC} = r^4 \operatorname{tg} 36^\circ (3 + \operatorname{tg}^2 36^\circ) / 12,$$

a całkowity moment biegunowy $J_0 = 10 (J_0^*)_{ABC}$, skąd poszukiwane

$$J_y = J_z = 5r^4 \operatorname{tg} 36^\circ (3 + \operatorname{tg}^2 36^\circ) / 12 = 1,065 r^4.$$

3. Jak zmieni się wynik zadania 2, jeśli z przekroju usunąć 5 połówek kół (rys. 4.18)? Przyjąć $r_1 = r/2$.

Odp. Biegunowy moment jednego półkoła względem punktu C

$$J_0^* = (\pi r_1^4 / 4) + (\pi r_1^2 / 2) [r^2 - (8r r_1 / 3\pi)] \approx 0,275 r^4.$$

Momenty J_y i J_z zmniejszają się o $5 J_0^* / 2$ i są $J_y = J_z \approx 0,378 r^4$.